

# CORTE DE ESTOQUE COM RESTRIÇÕES DE PERDAS MÁXIMAS UM CASO APLICADO NA INDÚSTRIA DE PAPEL



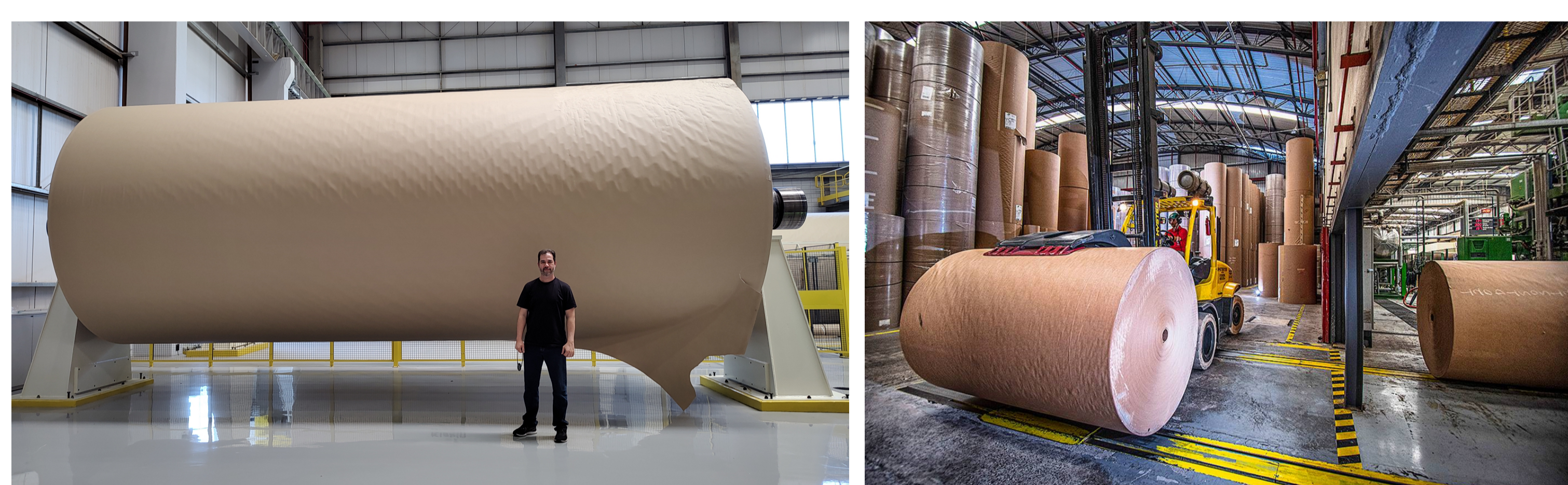
Ernée Kozyreff Filho<sup>1</sup>, Arnaldo Satoru Gunzi<sup>1</sup>,  
Silvio Araujo<sup>2</sup>, Kelly Poldi<sup>3</sup>

Klabin S.A.<sup>1</sup>, UNESP<sup>2</sup>, UNICAMP<sup>3</sup>  
poldi@unicamp.br<sup>3</sup>



## Descrição do problema

No problema de corte de estoque clássico, deseja-se determinar quais padrões de corte devem ser usados (e quantas vezes) de modo a minimizar o uso de matéria-prima para atender completamente a uma carteira de pedidos. Para resolver esse problema (relaxado), pode-se usar o método Simplex com geração de colunas. Em algumas situações reais, no entanto, existem restrições de perda máxima de material nos padrões de corte que requerem adaptações para que a geração de colunas possa ser usada. Este trabalho estuda um caso real na Klabin S.A. em que esse tipo de restrição adicional está presente.



Rolo jumbo (matéria-prima)

Bobinas na área de expedição

Deseja-se produzir bobinas de papel (itens finais) de diferentes larguras a partir de rolos (matéria-prima) de comprimento  $L$ . É conhecida uma lista de larguras ( $l_1, \dots, l_m$ ) e demandas ( $d_1, \dots, d_m$ ) das bobinas menores, denominada uma *carteira*.

### Problema clássico

No problema de corte de estoque clássico, a demanda deve ser totalmente satisfeita consumindo-se a menor quantidade possível de matéria-prima.

Sejam  $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^p$  os vetores  $m$ -dimensionais representando todos os padrões de corte possíveis para essa carteira. O problema a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x_1 + x_2 + \dots + x_p \\ &\text{sujeito a} && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = d_1 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p = d_m \\ &&& x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

Na geração de colunas, padrões de corte  $\alpha^j$  são criados a cada iteração. Ao final da otimização, obtém-se uma lista dos padrões de corte gerados e as respectivas quantidades a serem produzidas.

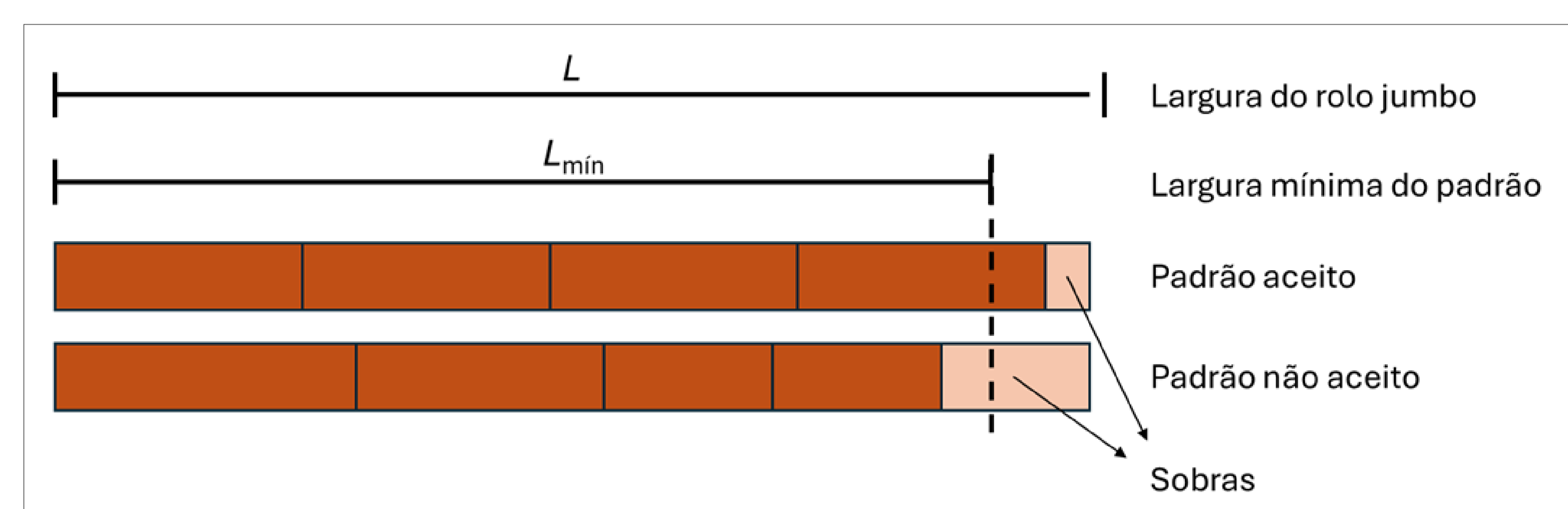
### Problema modificado

Na variação do problema estudado, existe a restrição adicional de que todo padrão de corte deve ter uma *perda máxima* pré-determinada, ou, equivalentemente, há uma *largura total mínima*,  $L_{\min}$ , para que o padrão de corte seja considerado viável.

A *largura total* de um padrão de corte  $\alpha^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$  é dada por  $L_j = a_{1j}l_{1j} + a_{2j}l_{2j} + \dots + a_{mj}l_{mj}$ . Portanto, para todo padrão  $\alpha^j$  gerado, devemos ter:

$$L_{\min} \leq L_j \leq L. \quad (2)$$

A presença dessa restrição adicional pode inviabilizar alguns padrões de corte que seriam utilizados no problema clássico, inclusive padrões homogêneos, que são usados na inicialização do algoritmo. Ademais, em alguns casos, não será possível atender toda a demanda.



Assim, o objetivo do problema modificado passa a ser produzir o máximo de bobinas (itens finais) sem ultrapassar a demanda de nenhuma largura. A perda de material não entra na função objetivo

e é controlada pela restrição (2). O novo problema a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && (\sum_{i=1}^m a_{i1})x_1 + (\sum_{i=1}^m a_{i2})x_2 + \dots + (\sum_{i=1}^m a_{ip})x_p \\ &\text{sujeito a} && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p \leq d_1 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p \leq d_m \\ &&& x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3)$$

Os coeficientes da função objetivo são o número de bobinas em cada padrão de corte e o seu valor final é a quantidade total de bobinas produzidas.

Para transformar o problema (3) em algo mais próximo do problema (1), introduzimos variáveis de folga e transformamos todas as restrições em igualdades. A função objetivo é alterada para a minimização da soma das variáveis de folga, o que equivale a minimizar a demanda **não atendida**, em número de bobinas. Desta forma, o problema em que é aplicada a geração de colunas é:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && s_1 + s_2 + \dots + s_m \\ &\text{sujeito a} && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + s_1 = d_1 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p + s_m = d_m \\ &&& x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ &&& s_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

Vale ressaltar que, neste problema, os coeficientes na função objetivo das variáveis  $x_j$  (associadas aos padrões de corte) são nulos, enquanto os coeficientes das variáveis de folga são unitários. Em contrapartida, no problema clássico não há variáveis de folga e os coeficientes das variáveis  $x_j$  na função objetivo são unitários.

## Abordagens de resolução

Foram usadas duas abordagens de resolução:

- 1) Resolução do problema (4) com a matriz completa, após a geração de todos os padrões de corte usando um algoritmo recursivo.
- 2) Simplex com geração de colunas com os padrões de corte gerados obedecendo à restrição (2).

## Testes computacionais

**Implementação:** Python / Pyomo + solver CBC.

**Hardware:** Intel Core i5 com 8 GB de RAM.

**Instâncias:** Dados históricos da empresa, sendo 821 carteiras produzidas num horizonte de 12 meses (novembro de 2022 a outubro de 2023).

**Resultados:** Para os dados testados, a fração da demanda atendida foi de aproximadamente 88 %.

Abordagem	Número médio de padrões gerados	Tempo médio de resolução
1	8705	2,3 s
2	28	4,5 s

Na Abordagem 1, o tempo médio para gerar todos os padrões de corte por meio de um algoritmo recursivo foi de 0,2 s (7 % do total).

Na Abordagem 2, o tempo médio para resolver o problema auxiliar foi de 4,4 s (98 % do total).

Das 821 carteiras testadas, a Abordagem 1 foi mais rápida em 773, a Abordagem 2 foi mais rápida em 46, e houve empate em 2.

Para os dados testados, o número médio de padrões de corte gerados pelo primeiro método foi muito superior ao segundo (8705 versus 28), enquanto que o tempo de resolução do primeiro método foi inferior ao do segundo (média de 2,3 s contra 4,5 s).

## Agradecimentos

Ao CNPq (402240/2023-5) e à FAPESP (2022/05803-3).

